ANWENDUNGSAUFABEN ZUR ANALYSIS

Möglichkeiten und Probleme

Heinrich Bürger und Andrea Blauensteiner

Im Rahmen einer Diplomarbeit wurde eine große Zahl von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung in verschiedenen Sachgebieten zusammengestellt. Davon werden hier 7 Aufgaben aus der Physik, aus der Wirtschaft und zum Populationswachstum vorgestellt und verschiedene Probleme, die sich mit deren Einsatz im Unterricht verbinden, untersucht.

Vorbemerkungen zu Anwendungen im Mathematikunterricht

Setzt man in die Formel für die kinetische Energie, $E = \frac{mv^2}{2}$, spezielle Werte ein, etwa $m = 1000$ kg und $v = 30$ m/sec (108 km/h), dann erhält man $E = 450\,000$ Joule. Mit dieser Zahl verbindet man jedoch kaum Vorstellungen. Erst durch Vergleich mit anderen Zahlen und insbesondere durch Untersuchungen über die Auswirkung von Änderungen einzelner Größen auf andere erhält man wesentliche Aussagen aus dieser Formel. So zeigt die Aussage, daß E zu v^2 direkt proportional ist, daß also etwa eine 3fache Geschwindigkeit eine 9fache kinetische Energie bewirkt, die schwerwiegenden Auswirkungen von Geschindigkeitserhöhungen auf.

Wenn sich also Schüler mit mathematischen Anwendungen verständnisvoll auseinandersetzen sollen, sind Fähigkeiten im Umgang mit Formeln Voraussetzung. Schüler sollen daher Formeln nicht nur zum Berechnen numerischer Werte, sondern vor allem zum Beschreiben von funktionalen Beziehungen, wie etwa Proportionalität oder exponentielles Wachstum, verwenden können. Ebenso sollen sie umgekehrt aus Formeln funktionale Beziehungen herauslesen können. Entsprechende Forderungen sind im Lehrplan der 3.Klasse der Gymnasien enthalten und bereits in der 1.Klasse sollen die Schüler lernen, Sachverhalte durch einfache Formeln zu beschreiben.

Für das Bearbeiten von Problemen aus außermathematischen Bereichen ist unerläßlich, daß die Schüler mit der jeweiligen Sachsituation verraut sind. Dabei kann entsprechendes Wissen aus anderen Unterrichtsgegenständen meist nicht erwartet werden kann. Vielmehr muß dieses Wissen im Mathematikunterricht zumindest wiederholt werden und es müssen geeignete Vorstellungen vermittelt werden. Wünschenawert wäre, mehrere Aufgaben zum gleichen Sachgebiet, zu stellen. Abgesehen von trivialen Variationen ist dies aber nicht immer möglich.

Zur Auswahl und Präsentation der Aufgaben

Die in der Diplomarbeit vorgestellten Anwendungsaufgaben zur Analysis, die einschließlich der Lösungen 75 Seiten füllen, sind einer Reihe von Unterrichtsvorschlägen in der Literatur entnommen. Die Aufgaben wurden teils neu formuliert und in Teilaufgaben zerlegt, um eine möglichst hohe Selbsttätigkeit der Schüler zu ermöglichen. Den Aufgaben wurden auch Sacherklärungen hinzugefügt.

Die Auswahl von passenden Unterrichtsaufgaben unterliegt verschiedenen Einschränkungen, zu denen die zumutbaren mathematischen Anforderungen, die nötigen Sachkenntnisse und die Bearbeitungszeit - nicht über eine Unterrichtsstunde - zählen. Probleme bereitet das Auffinden von Aufgaben für Prüfungen.

Bei den meisten in der Literatur enthaltenen Aufgaben zur Analysis waren die mathematischen Modelle als Formeln vorgegeben. Ein Eingehen auf Modellbildungen in der Analysis wird vielfach einen Projektunterricht erfordern.

Zu den Anwendungsaufgaben aus der Analysis ist zu bemerken, daß die im Unterricht eine große Rolle spielenden Extremwertaufgaben nicht allzu häufig auftreten, Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen scheinen fast gar nicht auf. Hingegen sind häufig Monotonieuntersuchungen nötig, aus denen sich Extremstellen unmittelbar ergeben.

Gravitationskraft

Aufgabe:

Zwei punktförmige Körper K_1 und K_2 mit der gleichen Masse m haben voneinander den Abstand 2d. Auf der Mittelsenkrechten von K_1K_2 befindet sich im Abstand a ein dritter punktförmiger Körper K_3 der Masse M.

a) Welche Gravitationskraft wird von K_1 und K_2 auf K_3 ausgeübt? Welche Richtung und Größe hat diese Kraft?

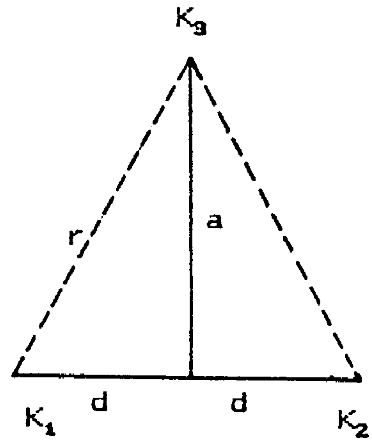

Fig. 1

b) Drücke diese Kraft in Abhängigkeit von a aus!

c) Kann man den Abstand a so wählen, daß der Betrag dieser Kraft maximal wird? Falls ja, dann berechne dieses Maximum.

[DZEWAS/KLIEM/KLINK/PFETZER 1980, S. 100-102]

Informationen:

Kraft ist eine gerichtete Größe. Sie beschreibt die Ursache von Verformungen und Bewegungen bzw. Bewegungsänderungen. Man stellt Kräfte vektoriell dar, um sowohl Größe auch als auch Richtung einer Kraft zu beschreiben.

Gravitationskräfte werden durch die gegenseitige Anziehung von Materie bewirkt. Die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern mit den Massen m_1 und m_2 und dem Abstand r beträgt:

$$F = G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}$$

Dabei ist G eine Konstante (Gravitationskonstante).

Lösung:

a) Die zwischen K_1 und K_3 wirkende Kraft hat ebenso wie die zwischen K_2 und K_3 wirkende Kraft den Betrag:

$$F_1 = F_2 = G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}$$

Dabei ist $r^2 = \overline{K_1K_3}^2 = a^2+d^2$ (nach Fig. 1).

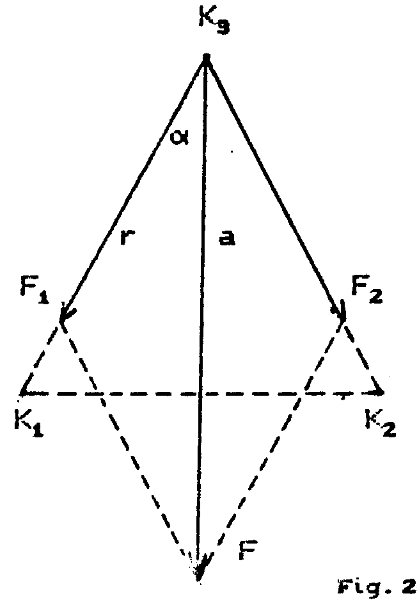

Fig. 2

Daraus folgt:

$$F_1 = G\cdot\frac{m\cdot M}{a^2+d^2}$$

Die von K_1 und K_2 auf K_3 ausgeübte resultierende Kraft hat die Richtung der Mittelsenkrechten von von K_1K_2 und den Betrag:

$$F = 2\cdot F_1\cdot\cos\alpha = 2\cdot G\cdot\frac{m\cdot M}{a^2+d^2}\cdot\cos\alpha$$

b) Wegen $\cos\alpha = \frac{a}{r}$ gilt:

$$F = 2\cdot G\cdot\frac{m\cdot M}{a^2+d^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}$$

$$F = 2\cdot G\cdot m\cdot M\cdot\frac{a}{\sqrt{(a^2+d^2)^3}}$$

c) Überlegungen zur Existenz eines Maximums von F:

- a sehr groß $\rightarrow$ Gravitationskräfte sehr klein, $F \rightarrow 0$
- $a = 0 \rightarrow$ Gravitationskräfte an K_3 im Gleichgewicht, $F = 0$

Es ist daher zu vermuten, daß es einen Abstand a mit $0<a<\infty$ gibt, für den die Gravitationskraft auf K_3 maximal ist.

Da $F(a)\geq 0$ für alle a ist, kann $F^2(a)$ untersucht werden:

$$F^2(a) = (2GmM)^2\cdot\frac{a^2}{(a^2+d^2)^3} \qquad (a\geq 0)$$

$$F^{2\prime}(a) = (2GmM)^2\cdot\frac{2a\cdot(d^2-2a^2)}{(a^2+d^2)^4}$$

$$F^{2\prime}(a) = 0 \iff a = 0 \vee a = \frac{d}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$F^{2\prime}(a) > 0 \iff a < \frac{d}{2}\cdot\sqrt{2} \rightarrow F^2$ und F streng monoton steigend für $0 \leq a \leq \frac{d}{2}\cdot\sqrt{2}$

$F^{2\prime}(a) < 0 \iff a > \frac{d}{2}\cdot\sqrt{2} \rightarrow F^2$ und F streng monoton fallend für $a \geq \frac{d}{2}\cdot\sqrt{2}$

Somit ist F für $a = \frac{d}{2}\cdot\sqrt{2}$ maximal.

Maximale Energieübertragung

Aufgabe:

Bei der Spaltung von Uranatomen entstehen sehr schnelle Neutronen, die in einem Reaktor die Kernspaltung aufrecht erhalten sollen. Dazu müssen die Neutronen (Masse M, Geschwindigkeit V) erst abgebremst werden. Das geschieht durch elastische Stöße an ruhenden Kernen mit der Masse m, wobei die Energie $E = \frac{2mM^2V^2}{(m+M)^2}$ von dem stoßenden auf den gestoßenen Körper übertragen wird.
Wie groß muß man die Masse des gestoßenen Körpers wählen, damit der stoßende Körper möglichst viel Energie verliert? Wie groß ist dann die Restenergie?
[DZEWAS/KLIEM/KLINK/PFETZER 1980, S. 107]

Lösung:

$$E'(m) = 2M^2V^2 \cdot \frac{M-m}{(m+M)^3}$$

$E'(m) = 0 \Leftrightarrow m = M$

$E'(m) > 0 \Leftrightarrow m < M \rightarrow$ E ist streng monoton steigend für $m<M$

$E'(m) < 0 \Leftrightarrow m > M \rightarrow$ E ist streng monoton fallend für $m>M$

Somit ist M eine globales Maximum für E.
Das bedeutet physikalisch, daß ein Neutron an ein Teilchen mit gleicher Masse die meiste Energie beim Stoß abgibt und daher ein Teilchen gleicher Masse die beste Abbremsung erzeugt.

Die an bremsende Teilchen abgegebene Energie ist dann $E = \frac{m \cdot V^2}{2}$, die Restenergie des Neutrons ist 0.

Lagerkosten

Aufgabe

Ein Hersteller verschiedener Produkte kann in einem Jahr mit einem zeitlich gleichmäßig verteiltem Absatz von B Stück eines bestimmten Gutes rechnen. Dazu möchte er die Gesamtproduktion dieses Gutes in mehrere Teilproduktionen von gleicher Stückzahl aufteilen. Wieviel Stück muß jede Teilproduktion enthalten, wenn die Kosten minimal sein sollen?

Für die Berechnung von Kosten sind folgende Zahlen von Bedeutung:

F ... Umrüstungskosten für die Umstellung von Maschinen auf eine neue Produktion

k_p ... Produktionskosten pro Stück

x ... Zahl der Stücke, die bei einer Teilproduktion hergestellt werden

L ... Lagerkosten pro Stück und pro Jahr

t ... durchschnittliche Lagerdauer für die in einer Produktionseinheit erzeugten Stücke

a) Stelle eine Formel auf, die die Summe der Kosten aus Umrüstung, Produktion von x Stück und deren Lagerung angibt.

b) Die durchschnittliche Lagerdauer t für die Produkte einer Einheit hängt vom Verhältnis x:B ab. Gib eine Formel für diese Abhängigkeit an, wenn gleichmäßiger Absatz vorausgesetzt wird.

c) Ermittle, für welche Zahl x alle auflaufenden Kosten für ein Stück minimal sind. In welchen Zeitabständen müssen in diesem Fall die Teilproduktionen angesetzt werden?

d) Untersuche die Annahmen und das Ergebnis dieser Rechnung kritisch. Ist der Einsatz der Differentialrechnung gerechtfertigt?

[FAY 1972, S. 79-81]

Lösung:

a) Summe aller Kosten für x Stück:

$$K(x) = F + x \cdot k_p + x \cdot t \cdot L$$

b) Bei gleichmäßigem Absatz entfällt auf 1 Stück der Jahresbruchteil $\frac{1}{B}$, auf x Stück der Jahresbruchteil $\frac{x}{B}$.
Die durchschnittliche Lagerdauer erhält man als Mittelwert:

$$t = \frac{0 + \frac{x}{B}}{2} = \frac{x}{2B}$$

c) Mit diesem Wert für t ergibt sich für die Summe aller Kosten x Stück:

$$K(x) = F + x \cdot k_p + x \cdot \frac{x}{2B} \cdot L$$

Summe aller Kosten für ein Stück unter der Voraussetzung, daß x Stück produziert werden:

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{F}{x} + k_p + x \cdot \frac{L}{2B}$$

Ermittlung des Minimums:

$$k'(x) = -\frac{F}{x^2} + \frac{L}{2B}$$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2BF}{L}}$$

$$k'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{\frac{2BF}{L}} \rightarrow \text{k streng monoton fallend}$$

$$k'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{2BF}{L}} \rightarrow \text{k streng monoton steigend}$$

Minimale Kosten für ein Stück entstehen, wenn bei jeder Teilproduktion $\sqrt{\frac{2BF}{L}}$ Stück produziert werden. Die Intervalle zwischen dem Beginn aufeinanderfolgender Produktionen im Falle minimaler Kosten ist jener Teil eines Jahres, der durch $\frac{x_{min}}{B} = \sqrt{\frac{2BF}{L}} : B = \sqrt{\frac{2F}{BL}}$ gegeben ist.

d) Beispielsweise seien angeführt:
Die Annahme gleichmäßigen Absatzes kann bestenfalls näherungsweise erfüllt werden. Die Zahl $\sqrt{\frac{2BF}{L}}$ wird zumeist nicht ganzzahlig sein.

Der Einsatz der Differentialrechnung ist nur bedingt gerechtfertigt, weil die Funktion k nur für natürliche Zahlen definiert ist. Eine solche Funktion ist nicht differenzierbar. Allerdings ist die reelle Fortsetzung dieser Funktion, die durch den gleichen Term dargestellt werden kann, differenzierbar. Diese Fortsetzung hat im wesentlichen das gleiche Monotonieverhalten wie die ursprüngliche Funktion. Mindestens eine der beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die die gefundene Minimumstelle der reellen Funktion eingrenzen, ist eine Minimumstelle der ursprünglichen Funktion.

Ähnliche Aufgaben in FAY 1972 und in DZEWAS/KLIEM/KLINK/FETZER 1980.

Lohnkostenminimierung

Aufgabe:

Die Materialausgabe eines Betriebes wird stündlich von durchschnittlich a Arbeitern aufgesucht. Die Anzahl der in der Materialausgabe Beschäftigten sei b. Jener Bruchteil einer Stunde, in dem ein Arbeiter im Mittel bei der Materialausgabe abgefertigt wird, werde mit k bezeichnet.

Wenn in der Materialausgabe nur 1 Beschäftigter tätig wäre, würde die Abfertigungszeit für a Arbeiter $a \cdot k$ Stunden betragen. Wenn in der Materialausgabe b Personen beschäftigt sind, ist die Abfertigungszeit für a Arbeiter $t = k \cdot \frac{a}{b}$.

a) Der durchschnittliche Stundenlohn eines Arbeiters sei p_a, der entsprechende Lohn eines Beschäftigten in der Materialausgabe p_b. Stelle eine Formel für die gesamten Lohnkosten auf, die in der Materialausgabestelle durch die Anwesenheit der Arbeiter und der dort Beschäftigten entstehen.

b) Wie groß muß die Anzahl der Beschäftigten in der Ausgabestelle gewählt werden, damit die entstehenden Lohnkosten insgesamt minimal werden? Wie hoch sind diese Kosten dann?

[DZEWAS/KLIEM/KLINK/PFETZER 1980, S. 110]

<u>Lösung:</u>

a) Lohnkosten: $L = a \cdot p_a \cdot t + b \cdot p_b = a \cdot p_a \cdot k \cdot \frac{a}{b} + b \cdot p_b$

b) Minimum der Lohnkosten in Abhängigkeit von b:

$$L(b) = \frac{a^2 \cdot p_a \cdot k}{b} + b \cdot p_b$$

$$L'(b) = -\frac{a^2 \cdot p_a \cdot k}{b^2} + p_b$$

$$L'(b) = 0 \iff b = a \cdot \sqrt{\frac{p_a}{p_b} \cdot k}$$

$$L'(b) < 0 \iff b < a \cdot \sqrt{\frac{p_a}{p_b} \cdot k} \rightarrow \text{L streng monoton fallend}$$

$$L'(b) > 0 \iff b < a \cdot \sqrt{\frac{p_a}{p_b} \cdot k} \rightarrow \text{L streng monoton steigend}$$

Falls die Zahl der Lagerarbeiter (ungefähr) $a \cdot \sqrt{\frac{p_a}{p_b} \cdot k}$ ist, sind die Lohnkosten minimal. In diesem Fall betragen die Lohnkosten $a \cdot \sqrt{\frac{p_a}{p_b} \cdot k} \cdot (p_a + p_b)$.

<u>Zur Modellbildung</u>

Bei 25 Arbeitern, die pro Stunde 240 S Kosten verursachen und im Mittel in 6 Minuten abgefertigt werden können, sowie Beschäftigten in der Materialsausgabe, die Kosten von 180 S pro Stunde verursachen, entstehen auf Grund der obigen Berechnungen die geringsten Gesamtkosten bei 9 Beschäftigten in der Materialausgabe. Dieses Ergebnis scheint nicht realistisch zu sein, da damit ein Lagerarbeiter in einer Stunde nicht einmal 3 Arbeiter betreuen müßte und daher weniger als 18 Minuten arbeiten müßte. Dazu ist zu bemerken, daß in dem vorgegebenen Modell nur die Zeit zur Abfertigung der Arbeiter, aber keine Wartezeiten berücksichtigt wurden. Nimmt man an, daß diese Zeiten im Mittel ebenso lang sind wie die Abfertigungszeiten, dann ergibt sich, daß minimale Kosten bei 5 Beschäftigten in der Materialausgabe entstehen.

Exponentielles Wachstum

Im folgenden wird die Entwicklung der Größe P einer Population, die sowohl Zuflüsse (z.B. durch Geburten) als auch Abflüsse (z.B. durch Sterbefälle) hat. Dazu werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$P(t)$ ... Größe der Population zum Zeitpunkt t
$PZ(t,t+\Delta t)$ ... Populationszunahme im Zeitintervall $[t,t+\Delta]$
$PA(t,t+\Delta t)$ ... Populationsabnahme im Zeitintervall $[t,t+\Delta]$

Aufgabe a

Die Populationszunahme pro Zeiteinheit bezeichnet man als mittlere Zunahmerate der Population im Zeitintervall $[t,t+\Delta t]$. Man erhält sie durch Division der Zunahme im Intervall durch die Länge des Intervalls.
Wir nehmen an, daß die mittlere Zunahmerate im Zeitintervall $[t,t+\Delta t]$ proportional zu $P(t)$ ist.
Wir nehmen ebenso an, daß auch die mittlere Abnahmerate im Zeitintervall $[t,t+\Delta t]$ proportional zu $P(t)$ ist.
Drücke beide Sachverhalte durch je eine Gleichung aus.

(Hinweis: Vorausgesetzt wird, daß die Schüler mit dem Begriff der Proportionalität vertraut sind und wissen, daß im Falle der Proportionalität der Größe Y zur Größe X gilt: Es gibt genau eine Zahl k, sodaß für alle einander entsprechenden Werte von Y und X gilt: $Y = k\cdot X$)

Lösung

mittlere Zunahmerate: $\dfrac{PZ(t,t+\Delta t)}{\Delta t}$

Proportionalität: $\dfrac{PZ(t,t+\Delta t)}{\Delta t} = z\cdot P(t)$

mittlere Abnahmerate: $\dfrac{PA(t,t+\Delta t)}{\Delta t} = a\cdot P(t)$

Aufgabe b

$P(t+\Delta t)-P(t)$ ist die Gesamtänderung der Population im Intervall $[t,t+\Delta t]$, zusammengesetzt aus Zu- und Abnahme.
Zeige, daß für die mittlere Änderungsrate der Population P Intervall $[t,t+\Delta t]$ gilt:

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t} = (z-a)\cdot P(t) = k\cdot P(t) \quad \text{mit } k = z-a$$

Lösung:

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t} = \frac{PZ(t,t+\Delta t)-PA(t,t+\Delta t)}{\Delta t} = z.P(t)-a\cdot P(t) = k\cdot P(t)$$

Aufgabe c

Wie bezeichnet man den Grenzwert der mittleren Änderungsrate für $\Delta t \to 0$? Wir nehmen an, daß er existiert und zu $P(t)$ proportional ist. Beschreibe dies in einer Gleichung.

Lösung

Differentialquotient: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t)}{\Delta t} = P'(t)$

Proportionalität: $P'(t) = k\cdot P(t)$

Aufgabe d

Zeige, daß für jede Funktion der Art $P(t) = P_o\cdot e^{k.t}$ mit beliebigen reellen k und P_o (sinnvollerweise $P_o>0$) die Gleichung $P'(t) = k\cdot P(t)$ gilt, daß also jede dieser Funktionen eine "Lösungsfunktion" dieser "Differentialgleichung" ist. (Man kann zeigen, daß jede Lösungsfunktion von $P'(t) = k\cdot P(t)$ die Form $P(t) = P_o\cdot e^{k\cdot t}$ hat.)

Lösung

$P(t) = P_o\cdot e^{k.t} \quad \rightarrow \quad P'(t) = k\cdot P_o\cdot e \quad = k\cdot P(t)$

Aufgabe e

Was kann über das Monotonieverhalten der Funktion P und damit über das Wachstum der Population ausgesagt werden?

Lösung

$P'(t) > 0$ für $k>0$ $\rightarrow$ P ist überall streng monoton steigend, die Population wächst ständig

$P'(t) < 0$ für $k<0$ $\rightarrow$ P ist überall streng monoton fallend, die Population nimmt ständig ab

Die Populationsgröße wird aber nicht 0, da $P(t)>0$ für alle t.

Aufgabe f

Begründe: Die Steigung der Funktion P nimmt für $k>0$ mit wachsendem t zu, für $k<0$ mit wachsendem t ab.

Lösung

f) $P''(t) = k^2\cdot P_o\cdot e^{k\cdot t} > 0$ für alle t.

Somit ist P' und damit die Steigung streng monoton steigend. Für $k > 0$ bedeutet dies, daß das Wachstum der Population immer stärker zunimmt. Die Population wächst unbegrenzt. Für $k < 0$ ist $P' < 0$, die negative Steigung wächst, wird also dem Betrag nach kleiner. Die Population nimmt ständig aber immer weniger ab. (Es gilt aber stets: $P(t) > 0$. Allerdings nähert sich P unbegrenzt der Zahl.)

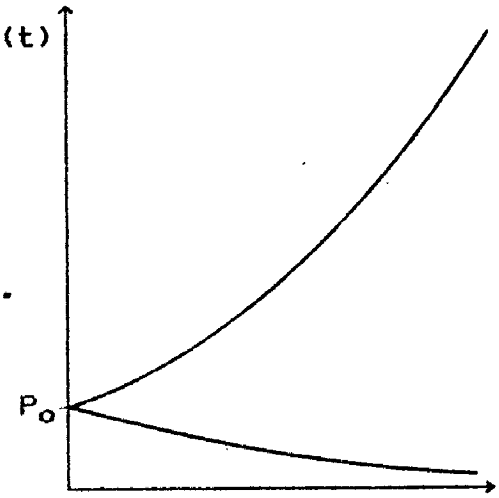

Fig. 3

Aufgabe q

Zeichne unter Verwendung eines Computers Graphen von Funktionen der Art $P(t) = P_o \cdot e^{k \cdot t}$ für verschiedenen Werte von k und verschiedene Werte von P_o. Ziehe Vergleiche und und überlege Folgerungen für die Entwicklung einer Population, die sich nach dieser Gesetzmäßigkeit ändert.

Wachstum mit Beschränkung

Im folgenden wird die Entwicklung einer Population unter folgenden Annahmen untersucht:

Die mittlere Zunahmerate $\frac{PZ(t,t+\Delta t)}{\Delta t}$ ist weiterhin proportional zur Populationsgröße P(t):

$$\frac{PZ(t,t+\Delta t)}{\Delta t} = z \cdot P(t)$$

Die mittlere Abnahmerate $\frac{PA(t,t+\Delta t)}{\Delta t}$ ist proportional zum Quadrat von P(t):

$$\frac{PA(t,t+\Delta t)}{\Delta t} = a \cdot [P(t)]^2$$

Aufgabe a)

Zeige: $\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t} = P(t) \cdot [z-a \cdot P(t)] = a \cdot P(t) \cdot [K-P(t)]$,

wobei $K = \frac{z}{a}$ gesetzt wurde.

Lösung

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t} = \frac{PZ(t,t+\Delta t)-PA(t,t+\Delta t)}{\Delta t} = z \cdot P(t)-a \cdot [P(t)]^2 =$$

$= a \cdot P(t) \cdot [K-P(t)]$, weil $z=K \cdot a$

Aufgabe b)

Ermittle $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$ unter der Annahme, daß P differenzierbar und daher auch stetig ist.

Lösung

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t} = P'(t) = a \cdot P(t) \cdot [K-P(t)]$$

Aufgabe c)

Zeige: Die Funktion $P(t) = \frac{KP_0}{P_0+(K-P_0)\cdot e^{-aKt}}$ ist eine Lösungsfunktion der Differentialgleichung $P'(t) = a \cdot P(t) \cdot [K-P(t)]$.

Lösung

Durch Differenzieren von P erhält man:

$$P'(t) = \frac{aK^2P_0(K-P_0)\cdot e^{-aKt}}{(P_0+(K-P_0)\cdot e^{-aKt})^2}$$

Durch Einsetzen von P(t) in die rechte Seite der Differentialgleichung erhält man:

$$a \cdot P(t) \cdot [K-P(t)] =$$
$$= a \cdot \left[\frac{KP_0}{P_0+(K-P_0)\cdot e^{-aKt}} \cdot \left[K - \frac{KP_0}{P_0+(K-P_0)\cdot e^{-aKt}}\right]\right] =$$
$$= \frac{aK^2P_0(K-P_0)\cdot e^{-aKt}}{(P_0+(K-P_0)\cdot e^{-aKt})^2}$$

Aufgabe d)

Beweise: Ist $P_0<K$, dann ist $P(t)<K$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$ und $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = K$.

Lösung

$$P_0+(K-P_0)\cdot e^{-aKt} > P_0 \quad \rightarrow \quad P(t) = \frac{KP_0}{P_0+(K-P_0)\cdot e^{-aKt}} < \frac{KP_0}{P_0} = K$$

$$\lim_{t \to \infty} e^{-aKt} = 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{KP_0}{P_0+(K-P_0)\cdot e^{-aKt}} = \frac{KP_0}{P_0} = K$$

Aufgabe e)

Es sei $P_0<K$. Was kann aus den Ableitungen P' und P" bezüglich der Entwicklung der Populationsgröße geschlossen werden?

Lösung

$$P'(t) = \frac{aK^2P_o(K-P_o)\cdot e^{-aKt}}{(P_o+(K-P_o)\cdot e^{-aKt})^2} > 0 \text{ für alle } t\in\mathbb{R}^+.$$

Die Population wächst ständig. In d) wurde aber gezeigt, daß die Populationsgröße die Zahl K nicht überschreitet, das Wachstum ist also beschränkt. Die Populationsgröße nähert sich allerdings der Zahl K unbegrenzt.

$$P''(t) = \frac{a^2K^3P_o(K-P_o)\cdot e^{-aKt}(-P_o+(K-P_o)e^{-aKt})}{((P_o+(K-P_o)\cdot e^{-aKt})^3}$$

$$\begin{aligned}
P''(t) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -P_o+(K-P_o)\cdot e^{-aKt} > 0\\
&\Leftrightarrow \quad e^{-aKt} > \frac{P_o}{K-P_o}\\
&\Leftrightarrow \quad e^{akt} < \frac{K-P_o}{P_o}\\
&\Leftrightarrow \quad aKt < \ln\frac{K-P_o}{P_o}\\
&\Leftrightarrow \quad t < \frac{1}{aK}\cdot\ln\frac{K-P_o}{P_o}\\
P''(t) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad t > \frac{1}{aK}\cdot\ln\frac{K-P_o}{P_o}
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{K}{P_o} > 1$ ist $\ln\frac{K-P_o}{P_o} > 0$

und damit $w = \frac{1}{aK}\cdot\ln\frac{K-P_o}{P_o} > 0.$

Für $0 < t < w$ nimmt das Wachstum ständig stärker zu, für $t>w$ nimmt es immer weniger zu.

Im Graphen ist an der Stelle w ein Wendepunkt (Fig. 4).

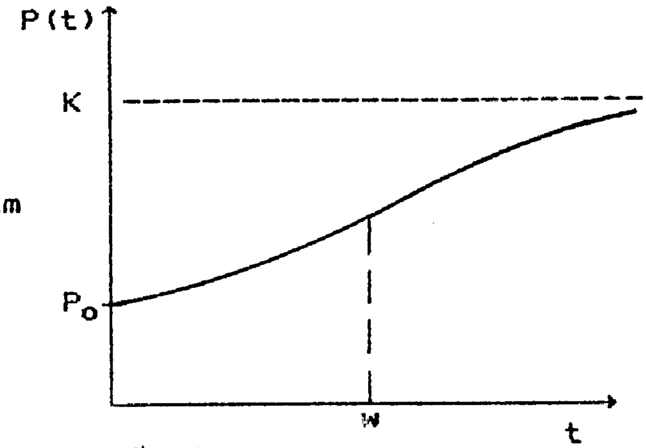

Fig. 4

LITERATUR

BÜRGER,H./FISCHER,R./MALLE,G. "Mathematik Oberstufe 4", Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1992

DZEWAS,J./KLIEM,U./KLINK,P./PFETZER,W. "Leistungskurs Analysis I", G.Westermann Verlag, Braunschweig 1980

FAY,F.J. "Extremwertprobleme im Wirtschaftsbereich und die Interpretation des Prinzips von Fermat als wirtschaftliches Prinzip" in: Der Mathematikunterricht 1972, S.76-94